ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 134 2021

© Бенараб С., 2021
DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220
УДК 517.922, 517.927.4

Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений

Сарра БЕНАРАБ
Лаборатория прикладной математики и моделирования,
Университет 8 Мая 1945 г. – Гельма
24000, Алжир, г. Гельма, п.я. 401

Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations

Sarra BENARAB
Applied Mathematics and Modeling Laboratory,
University 8 May 1945 – Guelma
B.P. 401, Guelma 24000, Algeria

Аннотация. Рассматриваются двухточечная (в том числе, периодическая) краевая задача для следующей системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производной искомой функции:

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Здесь при любом $i = \overline{1, n}$ функция $f_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измерима по первому аргументу, непрерывна по последнему аргументу, непрерывна справа и удовлетворяют специальному условию монотонности по каждой компоненте второго и третьего аргументов. Получены утверждения о существовании и двусторонних оценках решений (типа теоремы Чаплыгина о дифференциальном неравенстве). Также получены условия существования наибольшего и наименьшего (относительно специального порядка) решения. Исследование основано на результатах об абстрактных уравнениях с отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество (см. [С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский. О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления // Дифференц. уравнения, 2020, 56:11, 1471–1482]).

Ключевые слова: неявное дифференциальное уравнение, краевая задача, существование решений, оценки решений, теорема Чаплыгина о дифференциальном неравенстве

Для цитирования: *Бенараб С.* Двусторонние оценки решений краевых задач для неявных дифференциальных уравнений // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 134. С. 216–220. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220.

Abstract. We consider a two-point (including periodic) boundary value problem for the following system of differential equations that are not resolved with respect to the derivative of the desired function:

$$f_i(t, x, \dot{x}, \dot{x}_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

Here, for any $i = \overline{1, n}$, the function $f_i : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is measurable in the first argument, continuous in the last argument, right-continuous, and satisfies the special condition of monotonicity in each component of the second and third arguments. Assertions about the existence and two-sided estimates of solutions (of the type of Chaplygin's theorem on differential inequality) are obtained. Conditions for the existence of the largest and the smallest (with respect to a special order) solution are also obtained. The study is based on results on abstract equations with mappings acting from a partially ordered space to an arbitrary set (see [S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy. On functional and differential inequalities and their applications to control problems // Differential Equations, 2020, 56:11, 1440–1451]).

Keywords: implicit differential equation, boundary value problem, existence of solutions, estimates of solutions, Chaplygin's theorem on differential inequality

Mathematics Subject Classification: 34A09, 34A40, 34B10

For citation: Benarab S. Dvustoronniye otsenki resheniy krayevykh zadach dlya neyavnykh differentsial'nykh uravneniy [Two-sided estimates for solutions of boundary value problems for implicit differential equations]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 134, pp. 216–220. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-134-216-220. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В сообщении представлены утверждения о существовании и оценках решений краевых задач для системы неявных дифференциальных уравнений. Результаты аналогичны известной теореме Чаплыгина о дифференциальных неравенствах (см. [1], а также [2]).

Вопрос о распространении на неявные уравнения теорем о дифференциальных неравенствах рассматривался в работах [3–5]. Эти исследования существенно использовали результаты А. В. Арутюнова, Е. С. Жуковского, С. Е. Жуковского и др. авторов (см. [6–11]) об уравнениях с накрывающими отображениями, действующими в частично упорядоченных пространствах. Данное исследование основано на полученных в [12] результатах об абстрактных неравенствах, порожденных отображениями, действующими из частично упорядоченного пространства в произвольное множество. Использование этих утверждений позволило здесь получить теоремы типа Чаплыгина о существовании и двусторонних оценках решений краевых задач для систем неявных дифференциальных уравнений, причем при предположениях, несколько ослабляющих «традиционные» требования непрерывности и монотонности по фазовым переменным на функции, порождающие уравнения.

Сообщение состоит из двух пунктов. В пункте 1. приведены необходимые обозначения, в пункте 2. представлена теорема типа Чаплыгина о дифференциальном неравенстве для двухточечной краевой задачи. Из этой теоремы выводится соответствующий результат для периодической краевой задачи, полученный в работе [12].

1. Основные обозначения

Обозначим через M^n и L^n пространство измеримых (по Лебегу) на $[0,1]$ n-мерных функций и его подпространство суммируемых n-мерных функций с «обычным» порядком: для $u=(u_1,\ldots,u_n)\in M^n$, $v=(v_1,\ldots,v_n)\in M^n$, выполнено $u\le v$, если $u_i(t)\le v_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, при п.в. $t\in[0,1]$. Обозначим через AC^n пространство абсолютно непрерывных n-мерных функций (таким образом, $x\in AC^n \ \Leftrightarrow\ \dot{x}\in L^n$).

Пусть заданы функции $f_i:[0,1]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$f_i(t,x,\dot{x},\dot{x}_i)=0,\quad t\in[0,1],\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.1}$$

Решением системы (1.1) будем называть функцию $x \in AC^n$, удовлетворяющую всем уравнениям этой системы при п.в. $t \in [0,1]$.

Для уравнения (1.1) будем рассматривать двухточечную краевую задачу с условием

$$\gamma_{0i}\, x_i(0) + \gamma_{1i}\, x_i(1) = A_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

где числа $\gamma_{0i}, \gamma_{1i}, A_i$, $i = \overline{1,n}$, полагаем заданными. Частным случаем этой задачи при $\gamma_{0i} = 1$, $\gamma_{1i} = -1$, $i = \overline{1,n}$, является периодическая краевая задача с условием

$$x(0) - x(1) = A. \tag{1.3}$$

2. Двухточечная краевая задача

Пусть задана диагональная $n \times n$ - матрица $\lambda := \operatorname{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, где $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. По функциям f_i определим функции $g_i^\lambda : [0,1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, формулой

$$g_i^\lambda(t, x, v, y_i) := f_i(t, x, v + \lambda x, y_i + \lambda_i x_i), \quad i = \overline{1,n}.$$

Будем предполагать, что для функций g_i^λ, $i = \overline{1,n}$, выполнено условие

(G↓) *При п.в. $t \in [0,1]$, любых $x, v \in \mathbb{R}^n$ и $y_i \in \mathbb{R}$ функция $g_i^\lambda(\cdot, x, v, y_i) : [0,1] \to \mathbb{R}$ измерима, функция $g_i^\lambda(t, \cdot, v, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ возрастает и непрерывна справа по каждому аргументу $x_1, \dots, x_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, \cdot, y_i) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ убывает и непрерывна справа по каждому аргументу $v_1, \dots, v_n$, функция $g_i^\lambda(t, x, v, \cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ непрерывна.*

При таком предположении имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Предположим, что $\gamma_{1i} < 0$, $0 < \gamma_{0i} < -\gamma_{1i} \exp \lambda_i$. Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ таких, что*

$$\gamma_{0i}\, \nu_i(0) + \gamma_{1i}\, \nu_i(1) \geq \gamma_{0i}\, \eta_i(0) + \gamma_{1i}\, \eta_i(1), \quad \dot{\nu}_i - \lambda_i \nu_i \geq \dot{\eta}_i - \lambda_i \eta_i, \quad i = \overline{1,n},$$

выполнены неравенства

$$f_i(t, \nu(t), \dot{\nu}(t), \dot{\nu}_i(t)) \geq 0, \quad f_i(t, \eta(t), \dot{\eta}(t), \dot{\eta}_i(t)) \leq 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.1}$$

Тогда для любых A_i таких, что

$$\gamma_{0i}\, \eta_i(0) + \gamma_{1i}\, \eta_i(1) \leq A_i \leq \gamma_{0i}\, \nu_i(0) + \gamma_{1i}\, \nu_i(1), \quad i = \overline{1,n},$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее неравенствам

$$\dot{\eta} - \lambda \eta \leq \dot{x} - \lambda x \leq \dot{\nu} - \lambda \nu; \tag{2.2}$$

кроме того, существует наименьшая и наибольшая функции во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи (1.1), (1.2), удовлетворяющее неравенствам (2.2).

Доказательство этого утверждения использует редукцию к интегральному уравнению с помощью введения новой неизвестной функции $v \in L^n$, компоненты которой определяются равенствами $v_i = \dot{x}_i - \lambda_i x_i$, где x — решение задачи (1.1), (1.2). Эту замену (называемую W-подстановкой Азбелева [13]) можно также записать в виде $x_i = W_i v_i$, $i = \overline{1,n}$, где

$$W_i : L^1 \to AC^1, \quad (W_i v_i)(t) = (\gamma_{0i} + \gamma_{1i} \exp \lambda_i)^{-1} \Big(X_i(t) A_i + \int_0^1 \mathcal{W}_i(t,s) v_i(s)\, ds \Big),$$

$$X_i(t) = \exp \lambda_i t, \quad \mathcal{W}_i(t,s) = \begin{cases} \gamma_{0i} \exp \lambda_i (t-s), & 0 \le s \le t \le 1, \\ -\gamma_{1i} \exp \lambda_i (t-s+1), & 0 \le t < s \le 1. \end{cases}$$

Отметим, что интегральный оператор $W = (W_1, \dots, W_n) : L^n \to AC^n$ является антитонным. Вследствие этого свойства и принятых предположений для полученного интегрального оператора оказывается выполненным [12, следствие 2], из которого и вытекает разрешимость рассматриваемой краевой задачи.

При доказательстве существования наименьшей и наибольшей функции во множестве функций $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи (1.1), (1.2), используются результаты [12] о минимальном решении операторных уравнений и свойства оператора Немыцкого.

Применим теорему 2.1 к периодической краевой задаче. Это возможно, так как для коэффициентов в условии (1.3) справедливо следующее предположение теоремы 2.1

$$\gamma_{1i} = -1 < 0, \quad 0 < \gamma_{0i} = -1 < -\gamma_{1i} \exp \lambda_i.$$

Как и выше предполагаем, что выполнено условие $(\mathbf{G}\!\downarrow)$. Таким образом, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.1. *Пусть для некоторых функций $\nu, \eta \in AC^n$ выполнены неравенства*

$$\nu_i(0) - \nu_i(1) \ge \eta_i(0) - \eta_i(1), \quad \dot{\nu}_i - \lambda_i \nu_i \ge \dot{\eta}_i - \lambda_i \eta_i, \quad i = \overline{1,n},$$

и неравенства (2.1)*. Тогда для любых A_i таких, что*

$$\eta_i(0) - \eta_i(1) \le A_i \le \nu_i(0) - \nu_i(1), \quad i = \overline{1,n},$$

существует решение $x \in AC^n$ краевой задачи (1.1), (1.3)*, удовлетворяющее неравенствам* (2.2)*; кроме того, существует наименьшая и наибольшая функции во множестве всех функций вида $z := \dot{x} - \lambda x$, где x — решение задачи* (1.1), (1.3)*, удовлетворяющее неравенствам* (2.2)*.*

Сформулированные в следствии 2.1 условия разрешимости периодической краевой задачи (1.1), (1.3) были получены в [12, теорема 3], но в цитируемой работе не было установлено существование наибольшего и наименьшего решений.

References

[1] С. А. Чаплыгин, “Основания нового способа приближённого интегрирования дифференциальных уравнений”, *Собрание сочинений.* Т. 1, Гостехиздат, М., 1948, 348–368. [S. A. Chaplygin, “Foundations of a new method of approximate integration of differential equations”, *Collected Works.* V. I, Gostekhizdat, Moscow, 1948, 348–368 (In Russian)].

[2] Н. Н. Лузин, “О методе приближённого интегрирования акад. С. А. Чаплыгина”, *УМН*, **6**:6(46) (1951), 3–27. [N. N. Luzin, “On the method of approximate integration of academician S. A. Chaplygin”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **6**:6(46) (1951), 3–27 (In Russian)].

[3] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и интегральных неравенствах типа Чаплыгина”, *Алгебра и анализ*, **30**:1 (2018), 96–127; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On order covering maps in ordered spaces and Chaplygin-type inequalities”, *St. Petersburg Math. J.*, **30**:1 (2019), 73–94.

[4] Е. С. Жуковский, “Об упорядоченно накрывающих отображениях и неявных дифференциальных неравенствах”, *Дифференц. уравнения*, **52**:12 (2016), 1610–1627; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, “On Ordered-Covering Mappings and Implicit Differential Inequalities”, *Differential Equations*, **52**:12 (2016), 1539–1556.

[5] Т. В. Жуковская, И. Д. Серова, “Об оценке решения краевой задачи для неявного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом”, *Материалы Всероссийской научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения», посвященной 85-летию профессора М. Т. Терёхина. Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина, Рязань, 17–18 мая 2019 г. Часть 2*, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз., **186**, ВИНИТИ РАН, М., 2020, 38–44. [T. V. Zhukovskaya, I. D. Serova, “On estimates of solutions of boundary-value problems for implicit differential equations with deviating argument”, *Proceedings of the All-Russian Scientific Conference ≪ Differential Equations and Their Applications ≫ Dedicated to the 85th Anniversary of Professor M. T. Terekhin. Ryazan State University named for S. A. Yesenin, Ryazan, May 17-18, 2019. Part 2*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **186**, VINITI, Moscow, 2020, 38–44 (In Russian)].

[6] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств”, *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On the cardinality of the set of coincidence points of mappings in metric, normed and partially ordered spaces”, *Sbornik: Mathematics*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[7] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О точках совпадения отображений в частично упорядоченных пространствах”, *Доклады Академии наук*, **453**:5 (2013), 475–478; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “On coincidence points of mappings in partially ordered spaces”, *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 710–713.

[8] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “Точки совпадения многозначных отображений в частично упорядоченных пространствах”, *Доклады Академии наук*, **453**:6 (2013), 595–598; англ. пер.:A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points of set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Doklady Mathematics*, **88**:3 (2013), 727–729.

[9] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for set-valued mappings in partially ordered spaces”, *Topology and Its Applications*, **201** (2016), 330–343.

[10] A. V. Arutyunov , E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Coincidence points principle for mappings in partially ordered spaces”, *Topology and its Applications*, **179**:1 (2015), 13–33.

[11] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, И. Д. Серова, “Некоторые вопросы анализа отображений метрических и частично упорядоченных пространств”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:132 (2020), 345–358. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, I. D. Serova, “Some questions of the analysis of mappings of metricand partially ordered spaces”, *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:132 (2020), 345–358 (In Russian)].

[12] С. Бенараб, З. Т. Жуковская, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, “О функциональных и дифференциальных неравенствах и их приложениях к задачам управления”, *Дифференц. уравнения*, **56**:11 (2021), 1471–1482; англ. пер.:S. Benarab, Z. T. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, “Functional and differential inequalities and their applications to control problems”, *Differential Equations*, **56**:11 (2021), 1440–1451.

[13] Н. В. Азбелев, “Как это было (Об основных этапах развития современной теории функционально-дифференциальных уравнений)”, *Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах*, **9**:1(17) (2003), 1–22. [N. V. Azbelev, “How it was (On the main stages of development of modern theory of functional-differential equations)”, *Problems of Nonlinear Analysis in Engineering Systems*, **9**:1(17) (2003), 1–22 (In Russian)].

Информация об авторе

Бенараб Сарра, аспирант, Лаборатория прикладной математики и моделирования, Университет 8 мая 1945 г. – Гельма, г. Гельма, Алжир. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Поступила в редакцию 06.04.2021 г.
Поступила после рецензирования 04.06.2021 г.
Принята к публикации 10.06.2021 г.

Information about the author

Sarra Benarab, Post-Graduate Student. Applied Mathematics and Modeling Laboratory, University May 8, 1945 – Guelma, Guelma, Algeria. E-mail: benarab.sarraa@gmail.com
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8849-8848

Received 06.04.2021
Reviewed 04.06.2021
Accepted for press 10.06.2021